

N^o D'ORDRE

52

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
(Mathématiques)

PAR

范 會 國
FAN Wui-kwok
(Fan Hwei-kwo)

LICENCIÉ ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

ÉLÈVE DE L'INSTITUT FRANCO-CHINOIS DE LYON

1^{re} Thèse. - RECHERCHES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES QUASI EXCEPTIONNELLES ET LES FONCTIONS
MÉROMORPHES QUASI EXCEPTIONNELLES

2^e Thèse - PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : SUITES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

Soutenues le

1929, devant la Commission d'examen

MM. J. SIRE
H. DULAC

LYON
BOSC FRÈRES & RIOU
42, QUAI GAILLETON

1929

RECHERCHES

SUR LES

Fonctions entières quasi exceptionnelles

ET LES

Fonctions méromorphes quasi exceptionnelles

N° D'ORDRE

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
(Mathématiques)

PAR

范 會 國

FAN Wui-kwok

(Fan Hwei-kwo)

LICENCIÉ ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

ÉLÈVE DE L'INSTITUT FRANCO-CHINOIS DE LYON

1^{re} Thèse. - RECHERCHES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES QUASI EXCEPTIONNELLES ET LES FONCTIONS
MÉROMORPHES QUASI EXCEPTIONNELLES

2^e Thèse. - PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : SUITES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

Soutenues le

1929, devant la Commission d'examen

MM. J. SIRE

H. DULAC

LYON

BOSC FRÈRES & RIOU

42, QUAI GAILLETON

1929

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. † DEPÉRET, O. ✱,  I., ✱, Membre de l'Institut.

Assesseur

M. KÉHLER, O. ✱,  I., ✱, Correspondant de l'Institut.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, O. ✱,  I. — GÉRARD, O. ✱,  I., ✱ C. — RIGOLLOT, ✱,  I. —
VAUTIER,  I. — LE VASSEUR, ✱,  I. — OFFRET, ✱,  I., ✱.

Professeurs titulaires

MM. † DEPÉRET, O. ✱,  I., ✱, Membre de l'Institut, *Géologie*.
KÉHLER, O. ✱,  I., ✱, Correspondant de l'Institut, *Zoologie*.
DULAC, ✱,  I., *Calcul différentiel et intégral*.
MASCART, ✱,  I., ✱, *Astronomie physique*.
GRIGNARD, O. ✱,  I., ✱ P. N., Membre de l'Institut, *Chimie générale*.
SIRE,  I., ✱, *Mécanique rationnelle et appliquée*.
MEUNIER, ✱,  I., *Chimie industrielle*.
COUTURIER,  I., ✱, *Chimie agricole*.
BEAUVIER, ✱,  I., ✱, *Botanique*.
THOVERT, ✱,  I., ✱, *Physique*.
CARDOT,  I., *Physiologie générale et comparée*.
VANÉY, ✱,  I., *Zoologie*.
LONGCHAMON, ✱,  I., *Minéralogie théorique et appliquée*.

Professeurs titulaires (sans chaire)

MM. LOCQUIN, ✱,  I., *Chimie générale*.
JOB,  I., *Chimie physique*.
H. DOUIN,  I., *Botanique*.
DÉJARDIN,  I., *Physique*.
ROMAN, (F.)  I., *Géologie*.
LEMARCHANDS,  I., *Chimie industrielle*.

Maîtres de conférences et Chargés de cours complémentaires

MM. EYRAUD,  I., *Mathématiques*.
RICHE,  I., *Géologie*.
BONNET,  I., *Zoologie appliquée et Zootechnie*.
MAYET, ✱,  I., *Anthropologie*.
PELOSSE,  I., *Sériciculture*.
M^{me} BACHRACH,  I., *Physiologie*.
MM. DONCIEUX,  I., P. C. N. Supérieur.
SEYEWETZ, ✱,  I., *Matières colorantes artificielles*.



Secrétaire

M^{me} NÉTIEN,  I.

A MONSIEUR J. SIRE

Professeur à la Faculté des Sciences

Hommage respectueux et reconnaissant.

PRÉFACE

M. OSTROWSKY a étudié les fonctions méromorphes exceptionnelles. Ces fonctions sont caractérisées par le fait que la famille $f_n(z) = f(2^n z)$ est normale dans la couronne (Γ) ($\frac{1}{2} \leq (z) \leq 2$). Après les fonctions exceptionnelles, ce sont naturellement les fonctions quasi exceptionnelles qu'il s'agit d'étudier et dont voici la définition : une fonction méromorphe $f(z)$ est dite quasi exceptionnelle si la famille des fonctions $f_n(z)$ est quasi normale dans (Γ) . De plus, si l'ordre total de la famille $f_n(z)$ est fini, nous dirons que la fonction $f(z)$ est quasi exceptionnelle d'ordre total fini. Pour les fonctions entières, le cas de fonction exceptionnelle n'a pas lieu ; mais il existe des fonctions entières quasi exceptionnelles. Ce sont ces fonctions quasi exceptionnelles méromorphes ou entières dont je m'occuperai.

Après avoir rappelé succinctement dans le chapitre I quelques notions spéciales dont je me servirai dans la suite, je passe ensuite dans le chapitre II, à l'étude des fonctions entières quasi exceptionnelles. Je trouve notamment pour les fonctions entières quasi exceptionnelles d'ordre total fini une condition nécessaire et suffisante, et je démontre ensuite que toutes ces fonctions sont des produits canoniques d'ordre nul admettant dans chaque couronne (Γ_n) ($2^{n-1} \leq (z) \leq 2^n$) au plus p zéros, p étant un nombre donné. Nous montrons par des exemples que l'ensemble des points irréguliers de la famille $f_n(z)$ peut être un ensemble quelconque dans la couronne (Γ) .

Dans le troisième chapitre, je trouve une condition nécessaire et suffisante pour les fonctions méromorphes quasi exceptionnelles d'ordre total fini, et je montre par un exemple que dans le voisinage d'un point irrégulier il peut exister une valeur a , telle que le nombre des racines de $f_{p_n}(z) = a$ situées dans le voisinage de ce point irrégulier augmente indéfiniment avec p_n .

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

I. — Les familles quasi-normales de fonctions holomorphes.

1. CONVERGENCE UNIFORME ET DÉFINITION D'UNE FAMILLE NORMALE. — Considérons une suite de fonctions

$$(S) \quad f_1(z), \quad f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

holomorphes dans un domaine (D) ; on dit que cette suite *converge uniformément* dans ce domaine lorsque, ou bien il y a convergence uniforme sur tout ensemble fermé intérieur à (D) , ou bien la suite $\frac{1}{f_n(z)}$ converge uniformément vers zéro sur tout ensemble fermé intérieur.

Etant donnée une famille de fonctions $f(z)$, holomorphes dans un domaine (D) , on dit que c'est une *famille normale* dans ce domaine si, de toute suite infinie

$$f_1(z), \quad f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

de fonctions appartenant à la famille, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans l'intérieur de (D) vers une fonction-limite qui peut être soit une fonction holomorphe pouvant se réduire à une constante finie, soit la constante infinie.

On dit que la famille est *normale en un point P* du domaine ouvert (D), si elle est normale dans un cercle de centre P. Il est évident qu'une famille normale dans (D) est normale en tout point P du domaine ouvert (D).

Réciproquement, on démontre en appliquant le théorème de BOREL-LEBESGUE que si une famille est normale en tous les points du domaine (D), elle est normale dans ce domaine.

2. DÉFINITION D'UNE FAMILLE QUASI-NORMALE. — On dit qu'une famille de fonctions $f(z)$, holomorphes à l'intérieur de (D), est *quasi normale* dans ce domaine, si, de toute suite infinie de ces fonctions, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), sauf peut-être en un nombre fini de points. Les points autour desquels la convergence n'est pas uniforme sont appelés *points irréguliers*. Si le nombre des points irréguliers, qui peut varier avec la suite, ne dépasse jamais un nombre fixe p et peut atteindre ce nombre, on dit que la famille est *quasi normale d'ordre p*. Par exemple, les familles des fonctions

$$f_n(z) = 1 + nz,$$

$$\varphi_n(z) = 1 + nz^2,$$

sont quasi normales d'ordre un; n désignant en entier ou même un nombre complexe arbitraire.

D'après un théorème de WEIERSTRASS, il est facile de voir que pour une famille quasi normale de fonctions holomorphes, il ne peut y avoir de point irrégulier que pour une suite convergeant uniformément vers l'infini en dehors des points irréguliers. Donc si une famille

quasi normale de fonctions holomorphes n'admet pas comme fonction-limite la constante infinie, elle sera nécessairement normale.

3. Considérons une famille quasi normale de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) et soit z_0 un point irrégulier de cette famille; alors de la famille de fonctions $f(z)$ on pourra extraire une suite infinie

$$(S) \quad f_1(z), \quad f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

admettant effectivement ce point z_0 comme point irrégulier, c'est-à-dire que de cette suite il est impossible d'en extraire une autre suite infinie convergeant uniformément à l'intérieur d'un cercle de centre z_0 . Si (γ) désigne un cercle de centre z_0 et de rayon suffisamment petit, on a les deux propositions suivantes (1):

1° *Quelle que soit la constante a , à partir d'une certaine valeur de n , les équations $f_n(z) = a$ admettent au moins une racine dans (γ) .*

2° *Si, pour une valeur particulière a , les équations $f_n(z) = a$ admettent μ racines dans (γ) , il en sera de même, quelle que soit a . On dit alors que le point z_0 est un point irrégulier d'ordre μ .*

On dit qu'une famille de fonctions holomorphes est *quasi normale d'ordre total q* , si cette famille est quasi normale et si la somme des ordres de ses points irréguliers, supposés tous d'ordre fini, ne dépasse pas q pour chaque suite extraite de la famille, mais atteint ce nombre q pour une de ces suites au moins. Par exemple, la famille $\varphi_n(z) = 1 + nz^2$ est quasi normale

(1) P. MONTEL. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques, p. 66 et 138.

d'ordre total deux. La famille $\psi_n(z) = 1 + n! z^n$ est bien quasi normale avec le seul point irrégulier $z = 0$, mais son ordre total n'est pas fini.

M. P. MONTEL a établi le théorème suivant (1) :

Etant donnée une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D), si les fonctions de cette famille ne prennent pas dans ce domaine plus de p fois une valeur a , ni plus de q fois une valeur b , cette famille est quasi normale dans ce domaine et d'ordre au plus égal au plus petit des entiers p et q . Son ordre total est aussi au plus égal au plus petit de ces deux nombres p et q .

II. — Les familles quasi normales de fonctions méromorphes.

4. CONVERGENCE UNIFORME ET DÉFINITION D'UNE FAMILLE NORMALE. — Soit une suite (S) de fonctions :

$$(S) \quad f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

méromorphes dans un domaine (D), on dit que cette suite (S) converge uniformément dans ce domaine vers une fonction-limite $f_0(z)$, si chaque point z_0 de (D) est le centre d'un cercle possédant la propriété suivante : à tout nombre ε correspond un entier n_0 tel que, lorsque n est supérieur à n_0 et z intérieur au cercle, on ait :

$$\begin{aligned} & |f_0(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad \text{si } f_0(z_0) \text{ est fini} \\ \text{et} \quad & \left| \frac{1}{f_0(z)} - \frac{1}{f_n(z)} \right| < \varepsilon \quad \text{si } f_0(z_0) \text{ est infini.} \end{aligned}$$

La fonction limite $f_0(z)$ est nécessairement une fonction méromorphe, puisque, autour de chaque point

(1) P. MONTEL. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques, p. 67.

intérieur à (D), $f_0(z)$ ou $\frac{1}{f_0(z)}$ est holomorphe. Elle peut être en particulier une constante finie ou infinie.

Ceci étant, considérons une famille de fonctions $f(z)$, méromorphes à l'intérieur de (D), on dit que cette famille est *normale* dans ce domaine si, de toute suite infinie

$$f_1(z), \quad f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

de fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément à l'intérieur de (D) : la fonction-limite est une fonction méromorphe, ou une constante finie ou infinie.

5. DÉFINITION D'UNE FAMILLE QUASI NORMALE. — Soit une famille de fonctions $f(z)$, méromorphes dans un domaine (D), on dit que cette famille est *quasi normale d'ordre q* dans ce domaine, si toute suite infinie de fonctions de la famille est génératrice d'une suite nouvelle convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), sauf en un nombre fini q de points intérieurs à (D). Les points de convergence non uniformes sont appelés *points irréguliers*.

En dehors des points irréguliers, la limite est une fonction méromorphe ou une constante finie ou infinie. Par exemple la famille

$$f_n(z) = \frac{nz^2 + 1}{nz(z-1) + 1}$$

est quasi normale d'ordre un ; elle converge uniformément vers la fonction : $\frac{z}{z-1}$ sauf au point 0 où elle a pour limite l'unité.

Soit z_0 un point irrégulier pour une famille quasi normale de fonctions méromorphes, il existe une suite de fonc-

tions de la famille telle que, quel que soit a , l'équation

$$f_n(z) = a$$

ait des racines voisines de z_0 , à partir d'un certain rang, sauf peut-être pour une seule valeur de $a^{(1)}$.

On démontre que si z_0 est un point irrégulier d'une suite de fonctions méromorphes et que les équations

$$f_n(z) = a', \quad f_n(z) = a''$$

n'ont, respectivement, pas plus de μ' et μ'' , racines voisines de z_0 , les équations $f_n(z) = a$ auront, quel que soit a , à partir d'un certain rang, sauf peut-être pour une valeur exceptionnelle a_0 au plus, le même nombre μ de racines voisines de z_0 . Pour $a = a_0$, le nombre des racines voisines de z_0 peut être quelconque, et même croître indéfiniment avec $n^{(2)}$.

6. Soit une suite convergente de fonctions méromorphes $f_n(z)$ admettant un point irrégulier z_0 . On dit que z_0 est un point irrégulier d'ordre μ si les équations $f_n(z) = a$ admettent, à partir d'un certain rang, μ racines au plus voisines de z_0 , sauf peut être pour une seule valeur de a , et si, pour une infinité de fonctions $f_n(z)$, la limite μ est effectivement atteinte.

On dit qu'une famille de fonctions $f(z)$, méromorphes dans un domaine (D) , est quasi normale d'ordre total p , si la famille est quasi normale et si, pour chaque suite convergente de cette famille, la somme des ordres de ses points irréguliers ne dépasse pas l'entier p . Cette défi-

(1) M. P. MONTEL. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques, p. 139.

(2) M. P. MONTEL. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques, p. 141.

nition suppose, bien entendu, que chaque point irrégulier ait un ordre déterminé.

Comme dans le cas de familles de fonctions holomorphes, M. MONTEL a établi le théorème suivant relatif aux familles de fonctions méromorphes :

Les fonctions $f(z)$, méromorphes dans un domaine (D) , où elles ne prennent pas plus de p fois une valeur a , ni plus de q fois une valeur b , ni plus de r fois une valeur c , forment une famille quasi normale dans ce domaine. L'ordre de cette famille est au plus égal au nombre moyen de la suite p, q, r et son ordre total est fini⁽¹⁾.

(1) M. P. MONTEL. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques, p. 149.

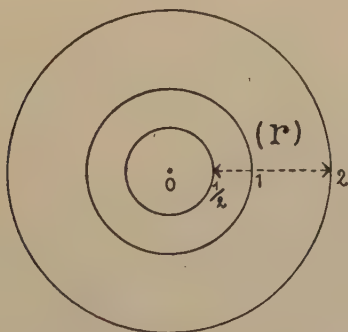
CHAPITRE II

LES FONCTIONS ENTIÈRES QUASI EXCEPTIONNELLES

I. — Etude des fonctions entières quasi exceptionnelles

7. DÉFINITION D'UNE FONCTION ENTIÈRE QUASI EXCEPTIONNELLE. — Soient $f(z)$ une fonction entière, (Γ) une couronne définie par $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$. Considérons la famille des fonctions

$$f_n(z) = f(2^n z)$$



Tout d'abord, cette famille ne peut être normale dans (Γ) , car si elle était normale, en reprenant le raisonnement de M. JULIA dans « Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé », page 106, on en conclurait ou que la fonction $f(z)$ se réduirait à une

constante ou qu'elle admettrait le point à l'infini comme pôle. Mais cette famille peut être quasi normale dans (Γ) , comme nous le montre l'exemple de la fonction

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^k} \right)$$

qui se déduit de la fonction considérée par M. JULIA (1) en posant $\sigma = 2$.

Alors si nous considérons un domaine (d) fini du plan ne contenant aucun zéro des fonctions $f_n(z)$ ni à son intérieur, ni sur sa frontière et si nous désignons par δ la plus courte distance de ces zéros à ce domaine, nous aurons en tout point z de (d)

$$|f_n(z)| > \left(\delta 2^{\frac{n+1}{2}} \right)^n A,$$

A désignant la borne inférieure de $|f(z)|$ dans le domaine (d) . Par suite, la suite des fonctions $f_n(z)$ converge uniformément vers l'infini dans tout domaine ne comprenant aucun zéro de $f_n(z)$, et admet ces zéros comme points irréguliers.

En particulier dans la couronne (Γ) , la famille des fonctions $f_n(z)$ admet trois points irréguliers, à savoir les points $\frac{1}{2}$, 1 et 2, si (Γ) est fermé; et un seul point irrégulier $z=1$, si (Γ) est ouvert. Donc la famille $f_n(z)$ est quasi normale d'ordre un et d'ordre total aussi égal à un dans le domaine ouvert (Γ) .

Nous appellerons *fonction entière quasi exceptionnelle*

(1) C. JULIA. Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, page 122.

toute fonction entière $f(z)$ telle que la famille des fonctions

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

soit quasi normale dans (Γ) .

Si l'ordre total de la famille $f_n(z)$ est fini, nous dirons que la fonction $f(z)$ est une *fonction entière quasi exceptionnelle d'ordre total fini*.

8. ETUDE DES FONCTIONS ENTIÈRES QUASI EXCEPTIONNELLES DANS UN SECTEUR. — Soit z_0 un point irrégulier dans (Γ) de la famille quasi normale des fonctions $f_n(z) = f(2^n z)$, on pourra alors extraire de la famille $f_n(z)$ une suite infinie de fonctions

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \dots, f_{n_p}(z), \dots,$$

admettant effectivement ce point comme point irrégulier, c'est-à-dire qu'il est impossible d'extraire de la suite précédente une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur d'un cercle de centre z_0 . Décrivons de z_0 comme centre un cercle (ω_0) de rayon arbitrairement petit, alors quelle que soit la constante a , à partir d'un certain rang, toutes les équations $f_{n_p}(z) = a$ ont une racine (ou μ racines) dans ce cercle (ω_0) . Considérons alors les cercles $(\omega_1), (\omega_2), \dots, (\omega_n), \dots$ homothétiques de (ω_0) de rapport de similitude 2^n ; les valeurs prises par $f_n(z)$ dans (ω_0) sont celles que prend la fonction $f(z)$ dans $(\omega_1), (\omega_2), \dots, (\omega_n), \dots$; or, si nous menons la droite (J) déterminée par l'origine o et le point z_0 , tous ces cercles homothétiques ont leurs centres sur cette droite et sont tous situés dans un angle arbitrairement petit ayant (J) pour bissectrice; d'où le théorème de M. JULIA dans le cas d'une fonction entière quasi exceptionnelle : *dans*

un secteur, si petit qu'il soit, et ayant pour bissectrice la droite (J) joignant l'origine au point irrégulier z_0 , la fonction entière $f(z)$ quasi exceptionnelle prend une infinité de fois toutes les valeurs sans exception.

Il en résulte en particulier que pour une fonction entière quasi exceptionnelle le cas d'exception de M. PICARD ne peut se présenter.

Nous remarquerons que ce qui précède n'est pas nécessairement vrai pour une fonction entière qui n'est pas quasi exceptionnelle.

9. CONDITIONS D'EXISTENCE. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction entière $f(z)$ soit une fonction quasi exceptionnelle d'ordre total au plus égal à p , p étant un nombre fixe, est que les équations :

$$f(z) = 0, \quad f(z) - 1 = 0$$

n'aient pas plus de p racines dans chaque couronne (Γ_n) $\left(\frac{1}{2}^{n-1} \leq |z| \leq \frac{1}{2}^{n+1}\right)$, sauf peut-être dans un nombre fini de couronnes.

La condition est nécessaire : en effet, supposons que la fonction entière $f(z)$ soit une fonction quasi exceptionnelle d'ordre total au plus égal à p , alors la famille des fonctions :

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

sera, par définition, une famille quasi normale dans la couronne (Γ) d'ordre q et d'ordre total au plus égal à p ($p \geq q$).

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ait plus de p zéros dans une infinité de couronnes $(\Gamma_{n_1}), (\Gamma_{n_2}), \dots, (\Gamma_{n_p}), \dots$. Considérons la suite de fonctions :

$$(S) \quad f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \dots, f_{n_p}(z), \dots$$

Comme ces fonctions $f_{n_p}(z)$ prennent dans la couronne (Γ) les mêmes valeurs que la fonction $f(z)$ dans les couronnes (Γ_{n_p}) , elles admettront plus de p racines dans (Γ) .

La famille $f_n(z)$ étant quasi morale d'ordre q dans (Γ) , on peut extraire de la suite (S) une suite nouvelle :

$$f_{n'_1}(z), \quad f_{n'_2}(z), \dots, f_{n'_p}(z), \dots,$$

admettant effectivement q' points irréguliers z_1, z_2, z_q , dans (Γ) ($q' \leq q$). Décrivons de ces points z_i comme centres ($i=1-2 \dots q'$), des cercles $(\gamma_1), (\gamma_2), \dots (\gamma_{q'})$ de rayon arbitrairement petit, et extérieurs les uns les autres ; la suite $f_{n'_p}(z)$ converge uniformément vers la constante infinie dans le domaine (D) obtenu en retranchant de (Γ) les cercles (γ_i) . Donc, nous avons dans (D) , à partir d'un certain rang :

$$| f_{n'_p}(z) | > M,$$

M étant un nombre positif arbitraire ; cette inégalité nous montre qu'à partir d'une certaine valeur de n'_p , tous les zéros des fonctions $f_{n'_p}(z)$ sont dans les cercles (γ_i) ; donc à partir d'une certaine valeur de n'_p le nombre des zéros contenus dans ces cercles serait supérieur à p , ce qui est impossible, puisque la fonction $f(z)$ est d'ordre total au plus égal à p .

On verrait de la même manière que l'équation $f(z)=1$ n'a pas plus de p racines dans chaque couronne (Γ_n) , sauf peut-être dans un nombre fini de couronnes.

La condition est suffisante : en effet, s'il n'y a qu'un nombre fini de couronnes (Γ_n) dans lesquelles la fonction entière $f(z)$ peut prendre plus de p fois la valeur 0, ou la valeur 1 ; les fonctions holomorphes $f_n(z)$, sauf

peut-être un nombre fini d'elles, ne prendront pas dans (Γ) , plus de p fois la valeur 0, ni la valeur 1 ; elles formeront donc une famille quasi normale dans (Γ) d'ordre total au plus égal à p . D'ailleurs, comme nous avons vu au n° 7 que cette famille $f_n(z)$ ne peut être normale dans (Γ) , elle y sera alors nécessairement quasi normale. Donc la fonction $f(z)$ est, par définition, une fonction entière quasi exceptionnelle d'ordre total au plus égal à p .

REMARQUE — Comme les fonctions $f(z)$ et $f(z) - a$ sont quasi exceptionnelles d'ordre total fini en même temps, il en résulte que le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ contenus dans chaque couronne (Γ_n) sera également borné, quel que soit n . Dans la démonstration précédente, nous avons pris pour a la valeur particulière un.

10. Soit $f(z)$ une fonction entière ne prenant pas plus de p fois la valeur 0 dans chaque anneau $2^n \leq |z| \leq 2^{n+1}$. Nous allons démontrer que le nombre $\varphi(r)$ des zéros de cette fonction dont le module est inférieur ou égal à r est lui-même inférieur à $A \log r$, A étant une constante.

Nous avons en effet

$$\varphi(2^n) \leq np + p_0,$$

p_0 désignant le nombre des zéros intérieurs au cercle C , de rayon égal à l'unité ; si l'on pose

$$r = 2^n,$$

on a

$$n = \frac{\log r}{\log 2},$$

et il vient

$$\varphi(r) \leq \frac{\log r}{\log 2} p + p_0 = \log r \left(\frac{p}{\log 2} + \frac{p_0}{\log r} \right),$$

si r est assez grand nous pouvons toujours avoir

$$\frac{p}{\log 2} + \frac{p_0}{\log r} < A,$$

A désignant une constante, par suite

$$\varphi(r) < A \log r$$

Si l'on suppose maintenant que l'on ait

$$2^n < r < 2^{n+1},$$

on aura

$$\varphi(r) \leq \varphi(2^n) + p,$$

par suite

$$\varphi(r) < A \log 2^n + p < A \log r + p < A' \log r$$

A' désignant une nouvelle constante.

On voit que, quel que soit r , à partir d'une certaine valeur, on a toujours une expression de la forme

$$\varphi(r) < A \log r.$$

Soit r_n le module du n^{e} zéro de $f(z)$, nous avons

$$n < A \log r_n,$$

les r_n sont rangés par ordre de modules non décroissants, d'où

$$e^{\frac{\varepsilon n}{A}} < r_n^\varepsilon$$

par suite

$$\frac{1}{r_n^\varepsilon} < \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon n}{A}}} = e^{\frac{-\varepsilon n}{A}};$$

la série $e^{\frac{-\varepsilon n}{A}}$ est convergente, quel que soit $\varepsilon > 0$; il en

sera de même de la série $\frac{1}{r_n^\varepsilon}$, quel que soit $\varepsilon > 0$.

On peut arriver au même résultat en utilisant directement l'hypothèse que la fonction $f(z)$ a dans chaque anneau $2^n \leq |z| \leq 2^{n+1}$, au plus p zéros.

Considérons en effet la série

$$\frac{1}{r_1^\varepsilon} + \frac{1}{r_2^\varepsilon} + \dots + \frac{1}{r_n^\varepsilon} + \dots,$$

Comme dans l'anneau $2^n \leq |z| \leq 2^{n+1}$, il y a au plus p zéros et que chaque terme $\frac{1}{r_n^\varepsilon}$ correspondant est inférieur à $\frac{1}{(2^\varepsilon)^{(n-1)}}$; la somme d'un nombre quelconque de termes de la série considérée est inférieure à la somme de la série convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{(2^\varepsilon)^{n-1}}$$

si l'on suppose qu'on a laissé de côté les termes, en nombre fini, correspondant aux zéros dont le module est inférieur à 2. Donc la série $\frac{1}{r_n^\varepsilon}$ est, elle aussi, convergente, quel que soit $\varepsilon > 0$.

Il résulte que la fonction $f(z)$ est le produit d'une fonction entière dépourvue de zéro $e^{H(z)}$, $H(z)$ étant une fonction entière ou un polynome, par un produit canonique $\epsilon_1(z)$ d'ordre nul

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \dots e^{H(z)} = \epsilon_1(z) e^{H(z)},$$

a_n étant le n^{e} zéro de $f(z)$.

Ceci étant, nous allons démontrer la proposition suivante : *pour toute fonction entière $f(z)$ ne prenant pas dans chaque couronne (Γ_n) , plus de p fois la valeur 0, ni la valeur 1, la fonction $H(z)$ est une constante; ou, si l'on veut mieux, toute fonction entière $f(z)$ quasi exceptionnelle d'ordre total fini est un produit canonique d'ordre nul.*

Nous avons, en effet

$$(1) \quad f(z) \equiv \varepsilon_1(z) e^{H(z)}$$

et

$$(2) \quad 1 - f(z) \equiv \varepsilon_2(z) e^{K(z)}$$

avec

$$\varepsilon_2(z) = \left(1 - \frac{z}{b_1}\right) \left(1 - \frac{z}{b_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) \dots$$

b_n désignant les zéros de $1 - f(z)$, $\varepsilon_2(z)$ étant un produit canonique d'ordre nul comme ε_1 , K étant une fonction entière ou un polynome comme H .

De (1) et (2) on déduit :

$$(3) \quad \varepsilon_1(z) e^{H(z)} + \varepsilon_2(z) e^{K(z)} \equiv 1$$

Comme ε_1 et ε_2 sont des fonctions entières de genre nul, cette identité (3) est impossible si H et K ne sont pas des constantes comme l'a montré M. BOREL (1). Notre proposition est donc démontrée.

11. Considérons une fonction entière $f(z)$ d'ordre nul de la forme

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

ne prenant pas dans chaque couronne (Γ_n) plus de p fois la valeur 0, a_n désignant les zéros de la fonction.

(1) E. BOREL. Leçons sur les fonctions entières, page 103.

Comme $\varphi(r)$ qui désigne le nombre des zéros dont le module est inférieur ou égal à r , vérifie dans le cas considéré la condition

$$(1) \quad \varphi(r) < A \log r,$$

il en résulte que l'on a

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} < A < +\infty$$

en vertu d'une proposition de M. VALIRON (1), $M(r)$ désignant le module maximum de $f(z)$ pour $|z| = r$.

Démontrons maintenant que dans le cas considéré le nombre de zéros contenus dans chaque anneau (Γ_n) , de l'équation $f(z) = 1$ est aussi borné, quel que soit n ; et nous arrivons ainsi à la proposition suivante qui est en quelque sorte la réciproque de la proposition du numéro précédent : *toute fonction entière d'ordre nul de la forme*

$$(3) \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right)$$

ne prenant pas plus de p fois la valeur 0 dans chaque anneau (Γ_n) , est une fonction quasi exceptionnelle d'ordre total au plus égal à p .

En effet, nous venons de voir que toute fonction entière $f(z)$ d'ordre nul de la forme (3) et ne prenant pas plus de p fois la valeur 0 dans chaque couronne (Γ_n) vérifie la condition (2); donc si nous désignons par r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z)$, et ρ_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) - 1$, nous savons d'après un théorème de M. VALIRON (2) que le rapport $\frac{r_n}{\rho_n}$ a pour limite l'unité

(1) Voir la thèse de M. VALIRON, page 24.

(2) Voir la thèse de M. VALIRON, page 32.

lorsque n croît indéfiniment. Par suite nous pouvons déterminer un nombre entier N tel que pour $n > N$ on ait

$$(4) \quad \left| r_n - \rho_n \right| < \frac{1}{2^3} \rho_n$$

Ceci étant, supposons que le nombre s_n des zéros de $f(z) - 1$ contenus dans (Γ_n) admette pour plus grande limite la constante $+\infty$, alors pour une infinité de nombre $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, nous aurons

$$s_{p_n} > 3p$$

Si nous considérons les zéros de $f(z) - 1$ contenus dans (Γ_{p_n}) et dont les rangs sont tous supérieurs à N , nous aurons pour ces zéros :

$$(5) \quad \left| r_n - \rho_n \right| < \frac{1}{2^3} 2^{p_n+1} = 2^{p_n-2}$$

Cette inégalité nous montre que les zéros correspondants de $f(z)$ de module r devront être situés soit dans le même anneau (Γ_{p_n}) , soit dans les deux anneaux contigus de (Γ_{p_n}) , car s'il y avait un zéro correspondant de $f(z)$ de module r_n qui n'est pas dans l'un de ces trois anneaux, on aurait pour ce zéro :

$$(6) \quad \left| r_n - \rho_n \right| > 2^{p_n-2}$$

Ce qui est contre l'inégalité (5). Or, le nombre de zéros de $f(z)$ dans les trois anneaux consécutifs (Γ_{p_n-1}) , (Γ_{p_n}) , (Γ_{p_n+1}) est au plus égal à $3p$, il en résulte qu'il y a dans (Γ_{p_n}) au moins un zéro de module ρ_n de $f(z) - 1$, pour lequel l'inégalité (5) ne serait pas vérifiée. Donc le nombre des zéros de $f(z) - 1$ contenus dans chaque couronne (Γ_n) sera borné, quel que soit n .

REMARQUE 1. — Il peut se faire que pour une fonction entière $f(z)$ d'ordre nul, admettant au plus p zéros dans chaque couronne (Γ_n) , il existe une infinité de couronnes (Γ_n) ne comprenant aucun zéro dans leur intérieur. La fonction $f(z)$ étant quasi exceptionnelle, la suite des fonctions $f_n(z)$, formera une famille quasi normale d'ordre total au plus égal à p , mais de cette suite on peut extraire une suite partielle infinie n'admettant aucun zéro dans la couronne (Γ) , donc c'est une suite partielle qui convergera uniformément vers l'infini dans la couronne (Γ) ; par conséquent, il existera dans ce cas une infinité de couronnes (Γ_n) telles que l'on ait pour tout point de ces couronnes :

$$|f(z)| > A$$

A étant positif et aussi grand que l'on veut.

REMARQUE 2. — Nous avons vu que si le nombre de zéros appartenant à chaque couronne (Γ_n) ne dépasse pas p , la fonction $f(z)$ satisfaisait à la condition (2); mais il peut arriver que la condition (2) soit satisfaite dans certain cas où le nombre de zéros augmente indéfiniment au moins dans une infinité de couronnes (Γ_n) , comme nous le montre l'exemple de la fonction entière :

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\frac{n(n+1)}{2}} \right)^n$$

II. — Etude de l'ensemble des points irréguliers.

12. Nous avons vu au n° 7 un exemple de fonction entière quasi exceptionnelle d'ordre total fini pour

laquelle la famille des fonctions $f_n(z) = f(2^n z)$ n'admet qu'un seul point irrégulier dans la couronne (Γ) ; maintenant nous allons voir qu'il existe des fonctions entières quasi exceptionnelles d'ordre total fini telles que la famille $f_n(z)$ admette dans la couronne (Γ) un ensemble dénombrable ou continu (linéaire ou superficiel) comme points irréguliers.

EXEMPLE 1. — Considérons la fonction :

$$f(z) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{e^{\frac{2m\pi i}{p}}} \right)$$

C'est évidemment une fonction entière d'ordre nul, n'admettant qu'un zéro dans chaque couronne ouverte (Γ_n) ; donc, d'après la proposition du n° 11, elle est quasi exceptionnelle d'ordre total fini, c'est-à-dire que la suite des fonctions $f_n(z) = f(2^n z)$ forme une famille quasi normale d'ordre total fini dans (Γ) . Cette suite des fonctions admet p points irréguliers dans (Γ) et on peut le voir en reprenant le raisonnement par lequel M. JULIA a étudié l'ensemble $E_\sigma(1)$.

EXEMPLE 2. — Soit la fonction

$$f(z) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^m e^{im\alpha}} \right)$$

α étant incommensurable avec 2π . C'est évidemment une fonction entière quasi exceptionnelle d'ordre total fini comme l'exemple précédent.

Dans ce cas, en reprenant comme précédemment le raisonnement que fait M. JULIA dans l'étude de l'ensemble E_σ , on voit facilement que l'ensemble des

(1) C. JULIA. Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, page 122.

points irréguliers de la famille $f_n(z)$ dans la couronne ouverte (Γ) est formé de tous les points de la circonférence $|z| = 1$.

EXEMPLE 3. — Soit la fonction

$$f(z) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sin m \alpha\right) 2^m e^{im\alpha}} \right)$$

α étant incommensurable avec 2π . Comme pour les exemples 1 et 2, on voit que c'est une fonction entière quasi exceptionnelle d'ordre total fini.

Dans ce cas, l'ensemble des points irréguliers de la famille des fonctions $f_n(z)$ appartenant à (Γ) sera constitué par tous les points de ce domaine, car d'une part si r_n désigne le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, l'ensemble des nombres $\frac{r_n}{2^n}$ et $\frac{r_{n-1}}{2^n}$ admet comme éléments tous les nombres de l'intervalle $(\frac{1}{2}, 2)$, et d'autre part l'ensemble des arguments des zéros admet toutes les valeurs θ appartenant à l'intervalle $(0, 2\pi)$.

CHAPITRE III

LES FONCTIONS MÉROMORPHES QUASI EXCEPTIONNELLES

13. DÉFINITION D'UNE FONCTION MÉROMORPHE QUASI EXCEPTIONNELLE. — Etant donnée une fonction méromorphe $f(z)$, on démontre que la famille des fonctions définies par :

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

ne peut être normale dans le cercle $|z| < 2$ (1). Mais il peut arriver que la famille $f_n(z)$ soit normale dans la couronne (Γ) : c'est le cas des fonctions exceptionnelles étudiées par M. Ostrowsky.

Ce cas extrême rappelé, demandons-nous s'il existe des fonctions méromorphes $f(z)$ telles que la famille des fonctions $f_n(z)$ soit quasi normale dans le domaine (Γ) . L'exemple de la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2^2-z} + \dots + \frac{1}{2^n-z} + \dots$$

qui se déduit de la fonction considérée par M. JULIA (2) en remplaçant q par 2, nous montre qu'il en est bien ainsi. En effet, si l'on pose $f_n(z) = f(2^n z)$, tout point

(1) P. MONTEL. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques, page 158.

(2) C. JULIA. Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, page 130.

2^k sera un pôle pour les fonctions $f_n(z)$ à partir d'un certain rang, et en dehors de ce point ces fonctions tendront uniformément vers zéro ; elles ne peuvent donc pas former une famille normale autour de ce point. Donc, l'ensemble des points du plan autour desquels la famille $f_n(z)$ cesse d'être normale est formé par les points 2^k , k variant de $-\infty$ à $+\infty$.

En particulier, les points irréguliers contenus dans (Γ) sont les points $1/2, 1, 2$, si (Γ) est fermé ; et un seul point 1 , si (Γ) est ouvert.

Nous appellerons *fonction méromorphe quasi exceptionnelle*, toute fonction méromorphe telle que la famille des fonctions.

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

soit quasi normale dans le domaine (Γ) .

Si l'ordre total de la famille $f_n(z)$ est fini, nous dirons que la fonction $f(z)$ est une *fonction méromorphe quasi exceptionnelle d'ordre total fini*.

14. ETUDE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE QUASI EXCEPTIONNELLE DANS UN SECTEUR. — Soient $f(z)$ une fonction méromorphe quasi exceptionnelle, z_0 un point irrégulier à l'intérieur de la couronne (Γ) de la famille $f_n(z)$. Décrivons un cercle (ω_0) arbitrairement petit de centre z_0 : les fonctions $f_n(z)$ ne peuvent admettre deux valeurs exceptionnelles dans (ω_0) . Donc, dans tout angle d'ouverture arbitrairement petite et ayant pour bissectrice la droite (J) joignant le point z_0 à l'origine, la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs finies ou infinies, sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus. D'où la proposition suivante :

Toute fonction méromorphe quasi exceptionnelle ne peut admettre plus d'une valeur exceptionnelle. Autre-

ment dit, pour une fonction méromorphe quasi exceptionnelle quelconque, le cas d'exception de M. Picard ne peut se présenter que pour une valeur au plus.

REMARQUE I. — Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, si elle admet deux valeurs exceptionnelles, elle ne sera certainement ni fonction exceptionnelle, ni fonction quasi exceptionnelle ; si elle n'admet qu'une valeur exceptionnelle, elle ne sera certainement pas fonction exceptionnelle ; si elle n'admet aucune valeur exceptionnelle, tous les cas peuvent se présenter.

REMARQUE II. — Soit $\varphi(z)$ une fonction entière quasi exceptionnelle, alors la fonction $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ sera une fonction méromorphe quasi exceptionnelle et représente la particularité qu'elle n'a pas de zéro dans tout le plan. Nous avons ainsi des exemples simples de fonctions méromorphes quasi exceptionnelles admettant une valeur exceptionnelle.

REMARQUE III. — Soit $f(z)$ une fonction méromorphe quasi exceptionnelle d'ordre total fini ; considérons un point irrégulier α_i d'une suite infinie $f_{pn}(z)$ extraite des fonctions $f_n(z)$; comme c'est un point irrégulier d'ordre fini, il existe une valeur a telle que les équations $f_{pn}(z) = a$ auront, à partir d'un certain rang, μ racines dans un cercle arbitrairement petit C_i de centre α_i ; par suite, d'après un théorème de M. MONTEL, ⁽¹⁾, la fonction limite $f_0(z)$ de la suite $f_{pn}(z)$ sera également méromorphe au point irrégulier α_i .

15. Soit s_n le nombre de pôles appartenant à la couronne (Γ_n) d'une fonction méromorphe $f(z)$ quasi

(1) M. MONTEL. Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques, page 138.

exceptionnelle d'ordre total fini, proposons-nous de déterminer la borne supérieure de l'ensemble de s_n . Cherchons d'abord si cette borne supérieure peut être infinie ; alors, dans cette hypothèse, il existera une suite de couronnes $(\Gamma_{q_1}), (\Gamma_{q_2}), \dots, (\Gamma_{q_n}), \dots$ telle que l'on ait

$$\lim_{q_n = \infty} s_{q_n} = \infty$$

Considérons la suite des fonctions $f_{q_1}(z), f_{q_2}(z), \dots, f_{q_n}(z), \dots$; cette suite formant par hypothèse une famille quasi normale d'ordre total fini dans (Γ) , on peut en extraire une suite nouvelle $f_{p_1}(z), f_{p_2}(z), \dots, f_{p_n}(z), \dots$ convergeant uniformément dans (Γ) , sauf au plus en q points irréguliers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, (Ces points pouvant d'ailleurs se trouver sur la frontière de (Γ)) vers une fonction-limite $f_0(z)$ qui, d'après la remarque précédente, est méromorphe dans tout le domaine (Γ) même aux points irréguliers.

Supposons d'abord que $f_0(z)$ soit une fonction méromorphe ne se réduisant pas à la constante infinie ou zéro ; alors, dans le domaine intérieur à (Γ) et extérieur aux cercles $C'_1, C'_2, \dots, C'_q$ de rayon arbitrairement petit et ayant pour centres les points irréguliers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, la fonction limite $f_0(z)$ possède s pôles ; il en est de même de $f_{p_n}(z)$ à partir d'une certaine valeur de n .

Considérons un des cercles C'_i et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'_i} \frac{f'_{p_n}(z) dz}{f_{p_n}(z)}.$$

Comme ces cercles C'_i peuvent être décrits de telle façon qu'il n'y ait aucun zéro ni aucun pôle de $f_0(z)$ sur les

circonférences, on voit que cette intégrale a pour limite finie l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{f'_0(z) dz}{f_0(z)}.$$

Donc la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de $f_{pn}(z)$ appartenant à C_i est finie. Il en est de même du nombre de pôles de $f_{pn}(z)$ appartenant à C_i ; car si ce nombre de pôles augmentait indéfiniment, il en serait de même du nombre de zéros appartenant à C_i , et le point irrégulier α_i ne serait pas d'ordre fini. Comme le nombre de ces cercles C_i est fini, il en résulte que le nombre des pôles de $f_{pn}(z)$ dans (Γ) est fini.

Supposons maintenant que la fonction-limite $f_0(z)$ soit la constante nulle. Je dis que dans ce cas le nombre de pôles de $f_{pn}(z)$ dans (Γ) est encore fini. En effet, dans le domaine intérieur à (Γ) et extérieur à tous les cercles C_i , nous avons à partir d'un certain rang

$$|f_{pn}(z)| < \varepsilon;$$

cette inégalité nous montre que les fonctions $f_{pn}(z)$ n'ont que des pôles dans des cercles C_i dès que n est assez grand. Les cercles C_i étant en nombre fini, il nous suffit de démontrer que le nombre de pôles de $f_{pn}(z)$ dans chacun de ces cercles C_i est fini pour affirmer qu'il est fini dans (Γ) . Considérons un de ces cercles C_i par exemple; comme le point irrégulier α_i est d'ordre fini, soit μ_1 cet ordre, il ne peut y avoir qu'une valeur exceptionnelle a' pour laquelle les équations $f_{pn}(z) = a'$ peuvent admettre plus de μ_1 racines dans C_i . Si a' n'est pas la constante infinie, le nombre de pôles de $f_{pn}(z)$ dans C_i sera égal à μ_1 à partir d'une certaine valeur

de n . Nous supposons donc que la valeur infinie est la valeur exceptionnelle: alors dans cette hypothèse, les équations $f_{pn}(z) = 0$ et $f_{pn}(z) = 1$ admettront μ_1 racines dans C_1' ; considérons la suite des fonctions

$$\varphi_{pn}(z) = \frac{f_{pn}(z)}{f_{pn}(z) - 1};$$

la fonction limite $\varphi_0(z)$ de cette dernière suite est la constante nulle; la seule valeur exceptionnelle possible est la constante zéro, comme l'a montré M. MONTEL (1). Il en résulte en particulier que les équations

$$\varphi_{pn}(z) = 1 \quad \text{ou} \quad f_{pn}(z) = f_{pn}(z) - 1$$

auront μ_1 racines dans C_1' dès que n est assez grand, c'est-à-dire que le nombre de pôles de $f_{pn}(z)$ dans C_1' est égal à μ_1 à partir d'un certain rang.

Supposons enfin que la suite $f_{p_1}(z), f_{p_2}(z), \dots, f_{pn}(z), \dots$, admette la constante infinie comme fonction limite, on ne peut alors rien affirmer, comme nous allons montrer par un exemple.

Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2^n}\right)^n};$$

nous allons démontrer que cette fonction dont le nombre de pôles augmente indéfiniment pour une infinité de couronnes (Γ_n) , est une fonction méromorphe quasi exceptionnelle d'ordre total fini pour laquelle une

(1) M. P. MONTEL. Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques, page 143.

suite quelconque $f_{pn}(z)$ extraite de la suite $f_n(z)$ a pour limite la constante infinie en dehors des points irréguliers.

Posons
$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n} \right)$$

et

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2^{e^n}} \right)^n$$

la fonction $f(z)$ s'écrit alors

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

soit r_n le module du zéro de rang n de la fonction $P(z)$;
comme $r_n = 2^n$, il en résulte que

$$\log r_n = n \log 2 \quad ;$$

donc si A et B sont deux nombres tels que $A < \log 2 < B$
nous aurons

$$A n < \log r_n < B n \quad ;$$

par suite, d'après un théorème de M. R. MATTSON (1),
nous avons la double inégalité suivante (2) :

$$(1) \quad \frac{A_1 (\log r)^2}{e} < M_1(r) < e \frac{B_1 (\log r)^2}{e}$$

A_1, B_1 étant deux constantes, $M_1(r)$ désignant le module maximum de $P(z)$ pour $|z| = r$.

Soit $\psi(r)$ le nombre des zéros de $Q(z)$ dont le module est inférieur ou égal à r , nous avons

$$\psi(2^{en}) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(1) Contribution à la théorie des fonctions entières, par M. R. MATTSON, page 67.

(2) La première partie des inégalités (2) peut aussi s'obtenir à l'aide du théorème de JENSEN.

si l'on pose

$$r = 2^{en}, \quad n = \log_2 r - \log_2 2$$

il vient

$$\psi(r) < A' (\log_2 r)^2,$$

si r est assez grand, A' désignant une constante.

Si l'on a

$$2^{en} < r < 2^{en+1}$$

il vient

$$\psi(r) = \psi(2^{en}) < A' (\log_2 2^{en})^2 < A' (\log_2 r)^2$$

Donc, quel que soit r à partir d'une certaine valeur r_0 , on a toujours l'expression suivante

$$\psi(r) < A' (\log_2 r)^2$$

Soit ρ_n le module du n^e zéro de $Q(z)$, on a alors

$$\log_2 \rho_n > \left(\frac{n}{A'} \right)^{\frac{1}{2}};$$

donc d'après un théorème de M. R. MATTSON (1), nous avons l'inégalité suivante :

$$(2) \quad M_2(r) < e^{\frac{A'' \log r (\log_2 r)^2}{2}},$$

A'' désignant une constante.

D'après (1) et (2), on voit que dans le plan dont on a exclu les cercles (γ_n) décrits de chaque zéro 2^n de $P(z)$ comme centre et ayant pour rayon $\varepsilon(n) 2^n$, $\varepsilon(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, on a pour r assez grand :

$$\left| f(z) \right| > e^{(\log r)^2 \left[A_1 - \frac{A'' (\log_2 r)^2}{\log r} \right]}$$

(1) Contribution à la théorie des fonctions entières, par M. R. MATTSON, page 63.

comme le second membre de cette inégalité tend vers l'infini avec r , il en sera de même du premier membre.

Ceci fait, on voit que toute suite infinie extraite de la suite $f_n(z)$ a pour limite la constante infinie ; car les valeurs de la fonction $f_n(z)$ dans (Γ) sont celles de $f(z)$ dans (Γ_n) ($2^{n-1} \leq |z| \leq 2^{n+1}$).

Démontrons enfin que la fonction considérée $f(z)$ est une fonction méromorphe quasi exceptionnelle d'ordre total fini. Pour cela, nous considérons l'équation :

$$(3) \quad \frac{P(z)}{Q(z)} - a = 0$$

a étant une constante quelconque. Nous avons :

$$(4) \quad P(z) - a Q(z) = 0$$

Comme nous venons de voir que dans le plan exclu des cercles (γ_n) et pour r assez grand, on a :

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| > M,$$

M étant une constante positive pouvant être aussi grand que l'on voudra ; l'équation (3) n'aura des zéros que dans des cercles (γ_n) , si $|z|$ est assez grand.

En particulier sur les circonférences des cercles (γ_n) , on a :

$$\left| \frac{a Q(z)}{P(z)} \right| < 1 ;$$

donc, d'après un théorème de Rouché, la fonction $P(z) - a Q(z)$ et la fonction $P(z)$ auront un même nombre de zéros à l'intérieur de chaque cercle (γ_n) . D'ailleurs, comme on voit aisément que tout cercle (γ_n) ne dépasse pas une infinité de couronnes (Γ_n) , quel que soit ce cercle ; il résulte que le nombre de zéros de la fonction $f(z) - a$ appartenant à chaque couronne (Γ_n)

sera borné, quelle que soit cette couronne. En particulier, il existe trois valeurs a , b , c telles que la fonction $f(z)$ ne les prenne pas plus de p fois dans chaque couronne (Γ_n) ; donc la fonction considérée $f(z)$ est une fonction méromorphe quasi exceptionnelle d'ordre total fini, car les fonctions $f_n(z)$ qui ne prennent pas dans (Γ) plus de p fois la valeur a , ni la valeur b , ni la valeur c , forment une famille quasi normale dans (Γ) et d'ordre total fini. De plus, la fonction $f(z)$ est nécessairement quasi exceptionnelle, car le nombre de ses pôles appartenant à chaque couronne (Γ_n) n'étant pas borné, elle ne peut se réduire à une fonction exceptionnelle.

16. D'après ce que nous venons de faire au numéro précédent, nous voyons que si la suite des fonctions $f_{pn}(z)$ n'admet pas la constante infinie comme fonction-limite, le nombre de pôles de $f_{pn}(z)$ dans (Γ) est fini. De même, si la suite $f_{pn}(z)$ n'admet pas la constante a pour fonction limite, le nombre de racines des équations $f_{pn}(z) - a = 0$ appartenant à (Γ) sera borné.

Donc, si la fonction $f(z)$ est une fonction méromorphe quasi exceptionnelle d'ordre total fini, de toute suite infinie $f_{qn}(z)$ extraite de la suite $f_n(z)$, on peut extraire une suite partielle $f_{pn}(z)$ telle que les équations :

$$f_{pn}(z) = a, \quad f_{pn}(z) = b, \quad f_{pn}(z) = c$$

admettent au plus p racines dans la couronne (Γ) , les constantes a , b , c variant en général avec la suite considérée.

Réciproquement, si de toute suite infinie $f_{qn}(z)$, on peut extraire une suite nouvelle $f_{pn}(z)$ telle que les équations $f_{pn}(z) = a$, $f_{pn}(z) = b$, $f_{pn}(z) = c$ admettent

au plus p racines dans la couronne (Γ) , la fonction $f(z)$ sera quasi exceptionnelle d'ordre total fini, car, dans cette hypothèse, la famille $f_n(z)$ est quasi normale d'ordre total fini dans (Γ) .

D'après tout ce qui précède nous concluons : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction méromorphe $f(z)$ soit quasi exceptionnelle d'ordre total fini est que de toute suite infinie $f_{q_n}(z)$ extraite de la famille $f_n(z)$, on peut extraire une suite partielle $f_{p_n}(z)$ telle que les équations $f_{p_n}(z) = a$, $f_{p_n}(z) = b$, $f_{p_n}(z) = c$ admettent au plus p racines dans la couronne (Γ) , les constantes a , b , c , pouvant varier avec la suite considérée.

Considérons un chemin s'éloignant à l'infini ; α étant un point de ce chemin, désignons par E_α l'ensemble de toutes les valeurs prises par $f(z)$ en tous les points z de ce chemin situés au delà de α ; on sait que lorsque α croît indéfiniment, cet ensemble tend vers une limite que nous désignerons par E_∞ ; cet ensemble E_∞ est un ensemble parfait et continu. Si l'ensemble E_∞ ne recouvre pas tout le plan, on dit que le chemin considéré est un chemin d'indétermination incomplète ; dans le cas où E_∞ se réduit à un point, on a un chemin de détermination.

Dans le cas où l'on a affaire à un chemin d'indétermination incomplète, il existera au moins trois valeurs : a_1 , b_1 , c_1 n'appartenant pas à l'ensemble E_∞ , et ces trois constantes a_1 , b_1 , c_1 ne pourront être des fonctions-limites pour la famille $f_n(z)$. Donc, dans ce cas, il existe trois valeurs : a_1 , b_1 , c_1 telles que les équations $f(z) - a_1 = 0$, $f(z) - b_1 = 0$, $f(z) - c_1 = 0$ admet-

tent au plus p racines dans chaque couronne (Γ_n) .

Inversement, s'il existe trois valeurs a_1, b_1, c_1 telles que les équations $f(z) - a_1 = 0, f(z) - b_1 = 0, f(z) - c_1 = 0$ admettent au plus p racines dans chaque couronne (Γ_n) , on peut affirmer que la fonction $f(z)$ est une fonction quasi exceptionnelle d'ordre total fini pouvant, dans des cas particuliers, se réduire à une fonction exceptionnelle.

17. Considérons une fonction méromorphe quasi exceptionnelle quelconque $f(z)$ et les équations

$$f(z) = a, \quad f(z) = b, \quad f(z) = c,$$

et désignons par a_λ, b_μ, c_ν les racines de ces équations, on pourra se demander s'il est nécessaire que l'une au moins des valeurs limites des rapports de deux quelconques de ces racines a_λ, b_μ, c_ν soit égale à l'unité.

Pour cela, supposons qu'aucune valeur-limite de ces rapports ne soit égale à l'unité : alors, autour de chaque point de (Γ) , les fonctions $f_n(z)$ admettraient comme valeurs exceptionnelles au moins deux des nombres a, b, c , et la famille des fonctions $f_n(z)$ ne serait pas quasi normale dans (Γ) , ce qui est contre notre hypothèse. De là la proposition : *pour qu'une fonction méromorphe $f(z)$ soit quasi exceptionnelle, il est nécessaire que les rapports de deux suites au moins de racines des équations $f(z) = a, f(z) = b, f(z) = c$, admettent l'unité pour limite, a, b, c étant des constantes.*

Nous avons aussi la proposition suivante : *étant donnée une fonction méromorphe $f(z)$ et les équations $f(z) = a, f(z) = b, f(z) = c$, si le nombre des points a_λ, b_μ, c_ν contenus dans chaque couronne (Γ_n) ne dépasse*

pas un nombre p et qu'une valeur limite au moins des rapports de deux de ces racines est égale à l'unité ; la fonction $f(z)$ est nécessairement une fonction méromorphe quasi exceptionnelle d'ordre total fini.

En effet, si la première condition est remplie, la famille $f_n(z)$ est quasi normale d'ordre total fini dans (Γ) ; mais comme la seconde condition est remplie, la famille $f_n(z)$ ne peut se réduire à une famille normale dans (Γ) , elle y est donc nécessairement quasi-normale.

TABLE DES MATIÈRES

PREFACE.	7
------------------	---

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.	9
-----------------------	---

I. Les familles quasi-normales de fonctions holomorphes..	9
---	---

II. Les familles quasi-normales de fonctions méromorphes.	12
---	----

CHAPITRE II.

Les fonctions entières quasi-exceptionnelles.....	17
---	----

I. Etude des fonctions entières quasi-exceptionnelles.....	17
--	----

CHAPITRE III.

Les fonctions méromorphes quasi-exceptionnelles.....	31
--	----

SECONDE THÈSE

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ

SUITES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

Lu et accepté :

Les Membres du Jury :

J. SIRE,
H. DULAC.

Vu et approuvé :

Pour le Doyen de la Faculté,

L'Assesseur,
KOEHLER

Vu et permis d'imprimer :

Lyon, le 27 avril 1929.

Le Recteur,

Président du Conseil de l'Université :

J. GHEUSI.

